

Logaritmen

Je kent de volgende bewerkingen: $2^3 = 8$ en $\sqrt[3]{8} = 2$

Er is nog een derde bewerking in dit rijtje en die zou je zo kunnen schrijven: $2^? = 8$.

Het antwoord is 3.

De vraag is in feite: 2 "tot de macht wat is" 8?

Dit stukje tekst kun je vervangen door de term log.

Dus: log = "tot de macht wat is"

Oefening 1

Vervang de term log door het stukje tekst "tot de macht wat is". Geef daarna antwoord.

Voorbeeld: $^2 \log 16$ -> 2 tot de macht wat is 16 -> antwoord: 4

- | | |
|---------------------|----------------------|
| a) $^2 \log 8$ | d) $^{10} \log 1000$ |
| b) $^2 \log 32$ | e) $^3 \log 27$ |
| c) $^{10} \log 100$ | f) $^4 \log 64$ |

Grondtal 10

Grondtal 10 laten we over het algemeen weg: $^{10} \log 100 = \log 100$.

Rekenmachine

Op je rekenmachine zit ook een log-knop. Helaas kun je daar niet zomaar alle logaritmen mee oplossen. Deze log-knop heeft namelijk standaard het grondtal 10.

Je kunt dus wél uitrekenen wat $^{10} \log 100$ is, namelijk $\log 100 =$

Maar je kunt niet zomaar uitrekenen wat $^2 \log 8$ is.

Toch is daar een trucje voor; we maken gebruik van rekenregel 1.

Rekenregel 1

$${}^g \log a = \frac{{}^p \log (a)}{{}^p \log (g)}$$

Wat betekent dit? Je mag iedere logaritme schrijven als een deling van twee andere logaritmen, waarbij je zelf een nieuw grondtal (p) kiest. In de teller krijg je dan ${}^p \log (a)$ en in de noemer ${}^p \log (g)$. Aangezien je zelf een nieuw grondtal mag kiezen, kies je natuurlijk grondtal 10. Want dan kan je rekenmachine het uitrekenen.

$${}^2 \log 8 = \frac{{}^p \log (8)}{{}^p \log (2)} = \frac{\log (8)}{\log (2)}$$

Oefening 2

Schrijf de volgende logaritmen als een deling met 10 als nieuw grondtal.

Reken daarna uit met je rekenmachine.

Voorbeeld: ${}^2 \log 16 = \frac{{}^{10} \log 16}{{}^{10} \log 2} = \frac{\log 16}{\log 2} = 4$

a) ${}^3 \log 243$

d) ${}^4 \log 1024$

b) ${}^7 \log 343$

e) ${}^2 \log 512$

c) ${}^6 \log 1296$

f) ${}^5 \log 15625$

Oefening 3

Reken uit met je rekenmachine (rond af op één decimaal).

a) ${}^2 \log 473 =$

d) $\frac{1}{4} \log 54 =$

b) ${}^5 \log 640 =$

e) $\frac{2}{5} \log 1000 =$

c) ${}^6 \log 80 =$

f) $\frac{3}{7} \log 1360 =$

We kijken naar twee nieuwe rekenregels. Deze regels kun je gebruiken als je twee logaritmen met hetzelfde grondtal bij elkaar optelt, of van elkaar aftrekt.

Rekenregel 2

$${}^s \log (a) + {}^s \log (b) = {}^s \log (ab)$$

Rekenregel 3

$${}^s \log (a) - {}^s \log (b) = {}^s \log \left(\frac{a}{b} \right)$$

Voorbeeld: ${}^3 \log (9) + {}^3 \log (27) = {}^3 \log (9 \times 27) = {}^3 \log (81) = 4$

Oefening 4

Schrijf als één logaritme.

a) ${}^2 \log 7 + {}^2 \log 4$

g) ${}^{10} \log 100 - {}^{10} \log 10$

b) ${}^5 \log 12 + {}^5 \log \frac{1}{2}$

h) ${}^5 \log x - {}^5 \log y$

c) ${}^3 \log \sqrt{6} + {}^3 \log \sqrt{6}$

i) ${}^3 \log (\sqrt{a}) + {}^3 \log (\sqrt{ab})$

d) ${}^2 \log a + {}^2 \log b$

j) ${}^5 \log (12) + {}^5 \log (2) - {}^5 \log (6)$

e) ${}^5 \log (2) + {}^5 \log (xy) + {}^5 \log \left(\frac{1}{y}\right)$

k) ${}^7 \log (x^2) - {}^7 \log (xy)$

f) ${}^3 \log 6 - {}^3 \log 2$

l) ${}^2 \log (\sqrt{y}) - {}^2 \log (y) + {}^2 \log (\sqrt{xy})$

Met de vierde en laatste rekenregel kun je logaritmes ombouwen en dat is soms handig om de logaritme te kunnen uitrekenen. Een *factor* die vóór de logaritme staat, kun je als *macht* toevoegen aan het getal waarvan je de logaritme neemt; en andersom.

Rekenregel 4

$$n \cdot {}^s \log (a) = {}^s \log (a^n)$$

Voorbeeld 1: $3 \cdot {}^5 \log (7) = {}^5 \log (7^3) = {}^5 \log (343)$

Voorbeeld 2:

${}^4 \log (x^2) = 128 \rightarrow 2 \cdot {}^4 \log (x) = 128 \rightarrow {}^4 \log (x) = 64 \rightarrow x = 3$

Oefening 5

Schrijf als één logaritme.

a) $6 \cdot {}^3 \log a$

c) $2 \cdot {}^3 \log (\sqrt{x}) + 3 \cdot {}^3 \log (2y)$

b) $3 \cdot {}^2 \log x$

d) $2 \cdot 5 \times {}^2 \log (10)$

Oefening 6

Zet de macht in de logaritme vóóraan.

a) ${}^3 \log a^2$

c) $4 \log 6^{(2a)}$

b) ${}^2 \log 4^x$

d) ${}^2 \log 8^{(2x+4)}$

Oefeningen op examenniveau

a) Schrijf als één logaritme en bereken: ${}^3 \log (243) + {}^3 \log \left(\frac{1}{27} \right) =$

b) Schrijf als één logaritme: $6 \cdot 4 \times {}^2 \log (a)$

c) Schrijf als één logaritme: ${}^5 \log (a^4) + {}^5 \log (b) - {}^5 \log \left(\sqrt[3]{c} \right)$

d) Bereken met rekenmachine: ${}^4 \log (265)$

e) Bereken met rekenmachine: $\frac{2}{7} \log (67)$

f) Bereken: ${}^5 \log (625)$

g) Bereken: ${}^6 \log \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{6^{-3}} \right) =$

h) Schrijf als één logaritme: $3 \times {}^9 \log (5 - p) - {}^9 \log (q - 7) =$

Antwoorden

1. a) 3 b) 5 c) 2 d) 3 e) 3 f) 3
2. a) 5 b) 3 c) 4 d) 5 e) 9 f) 6
3. a) 8,9 b) 4,0 c) 2,4 d) -2,9 e) -7,5 f) -8,5

4. a) $2 \log 28$

b) $5 \log 6$

c) $3 \log 6$

d) $2 \log(ab)$

e) $5 \log\left(\frac{2xy}{y}\right) = 5 \log(2x)$

f) $3 \log\left(\frac{6}{2}\right) = 3 \log(3) = 1$

g) $10 \log(10) = 1$

h) $5 \log\left(\frac{x}{y}\right)$

i) $3 \log(\sqrt{a} \times \sqrt{ab}) = 3 \log(\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}) = 3 \log(a\sqrt{b})$

j) $5 \log\left(\frac{12 \times 2}{6}\right) = 5 \log(4)$

k) $5 \log\left(\frac{x^2}{xy}\right) = 5 \log\left(\frac{x}{y}\right)$

l) $5 \log\left(\frac{\sqrt{y}\sqrt{xy}}{y}\right) = 5 \log\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{y}}{y}\right) = 5 \log\left(\frac{y\sqrt{x}}{y}\right) = 5 \log(\sqrt{x})$

5. a) $3 \log a^6$ b) $2 \log x^3$ c) $3 \log\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 (2y)^3\right) = 3 \log(8xy^3)$ d) $2 \log 10^{10}$

6. a) $2 \cdot 3 \log a$ b) $x \cdot 2 \log 4$ c) $2a \cdot 4 \log 6$ d) $(2x + 4) \cdot 2 \log 8 = 6x + 12$

Oefeningen op examenniveau

a) $3 \log(243) + 3 \log\left(\frac{1}{27}\right) = 3 \log\left(243 \times \frac{1}{27}\right) = 3 \log(9) = 2$

b) $6 \cdot 4 \times 2 \log(a) = 24 \times 2 \log(a) = 2 \log(a^{24})$

c) $5 \log(a^4) + 5 \log(b) - 5 \log(\sqrt[3]{c}) = 5 \log\left(\frac{a^4 b}{\sqrt[3]{c}}\right)$

d) $4 \log(265) = \frac{\log 265}{\log 4} = 4,0$

e) $\frac{2}{7} \log(67) = \frac{\log 67}{\log \frac{2}{7}} = -3,4$

f) $5 \log(625) = \frac{\log 625}{\log 5} = 4$

g) $6 \log\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{6^{-3}}\right) = 6 \log\left(\frac{6^{\frac{1}{3}}}{6^{-3}}\right) = 6 \log\left(6^{\frac{1}{3} - (-3)}\right) = 6 \log\left(6^{\frac{10}{3}}\right) = 3\frac{1}{3} \times 6 \log(6) = 3\frac{1}{3} \times 1 = 3\frac{1}{3}$

h) $3 \times 9 \log(5-p) - 9 \log(q-7) = 9 \log(5-p)^3 - 9 \log(q-7) = 9 \log\left(\frac{(5-p)^3}{q-7}\right)$