Wiskunde

Lineair programmeren - oefeningen

LJ2P4

1. Koffie en thee

Een kleine zakenman wil voor ten hoogste € 360 koffie en thee inkopen. Koffie kost € 3 per kg, thee € 4 per kg. De zakenman weet dat hij niet meer dan 100 kg koffie zal kunnen afzetten en niet meer dan 75 kg thee. Noem het aantal kilo koffie dat de zakenman inkoopt x en het aantal kilo thee y. Natuurlijk moet gelden: $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

a) Aan welke drie andere ongelijkheden moeten x en y voldoen als je let op het te besteden bedrag en de mogelijke afzet?
b) Kleur in een assenstelsel het toelaatbare gebied; het gebied waarin de punten liggen die aan alle vijf de voor- waarden voldoen. Teken eerst de grenslijnen. Stel dat de zakenman € 1 winst maakt per kg koffie en € 2 per kg thee.
c) Druk de winst die de zakenman maakt uit in x en y.
De zakenman wil zoveel mogelijk winst maken. Hij wil dus de functie $x + 2y$ (de doelfunctie) maximaliseren.
d) Teken enkele iso-winstlijnen.
e) Wat is het optimale inkoopplan, dat wil zeggen het plan dat de meeste winst oplevert?

2. Biks en hooi

In de stal van Jan Pol worden de pony's gevoerd zoals het hoort. 's Winters wordt er hoofdzakelijk biks en hooi aan de dieren gegeven. De belangrijkste bestanddelen van dit voer zijn:

- koolhydraten (zetmeel en suiker), ruwvezel en vetten, die zorgen voor de energievoorziening
- eiwitten, die van groot belang zijn voor de vorming van spieren, hoeven, bloed, enz.

Jasper is een pony die bij Jan op stal staat. Volgens het boekje heeft Jasper per dag 2100 gram zetmeel en 360 gram eiwit nodig. In één kg biks zit 600 gram zetmeel en 80 gram eiwit. In één kg hooi zit 300 gram zetmeel en 60 gram eiwit.

Jasper krijgt elke dag x kg biks en y kg hooi te eten.

a) Aan welke ongelijkheden moeten x en y voldoen?
b) Teken het toelaatbare gebied.
Een zak biks van 15 kg kost € 15; een baal hooi van 20 kg kost €8.
c) Jan wil de kosten voor het voer zo laag mogelijk hou- den. Welke doelfunctie wil Jan minimaliseren?
d) Teken enkele iso-kostenlijnen.
e) Wat is het optimale (dus goedkoopste) voerplan?

3. Salontafels

Een timmerfabriekje maakt twee soorten salontafels: modern eiken en klassiek eiken. Per dag kunnen er van elke soort hoogstens vijf gemaakt worden. In verband met de opslagcapaciteit mogen er per dag niet meer dan zeven tafels in totaal worden gemaakt. Een moderne tafel kost één mandag werk, een klassieke tafel kost twee mandagen. In de fabriek werken elf mensen aan de productie van salontafels.

Stel dat er per dag x moderne tafels en y klassieke gemaakt worden.

a) Welke omstandigheden beperken de dagelijkse productie?

b) Aan welke ongelijkheden (behalve $x \geq 0$ en $y \geq 0$) moeten x en y voldoen?

c) Teken het toelaatbare gebied.

De winst op een moderne tafel is € 200 en op een klassieke tafel € 300. Het bedrijf wil de winst maximaliseren.

d) Wat is doelfunctie?

e) Teken enkele iso-kostenlijnen.

f) Bij welk productieschema wordt de grootste winst gemaakt?

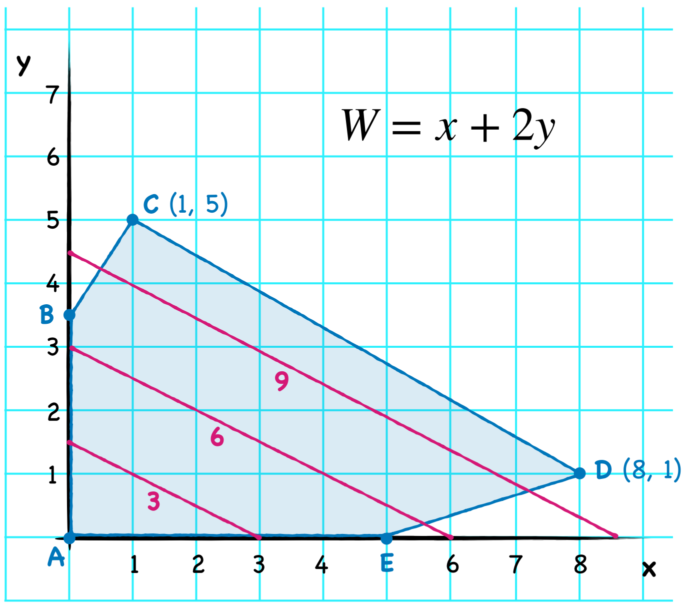
4. Isowinstlijnen

In elk van de volgende gebieden zijn drie iso-winstlijnen getekend.

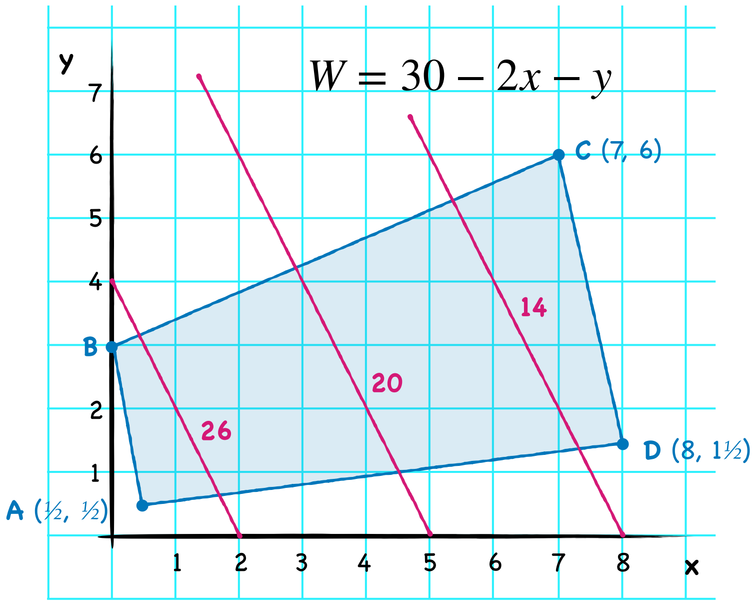
In welk hoekpunt is de winst maximaal? Hoe groot is die maximale winst?

In welk hoekpunt is de winst minimaal? Hoe groot is die minimale winst?

a)

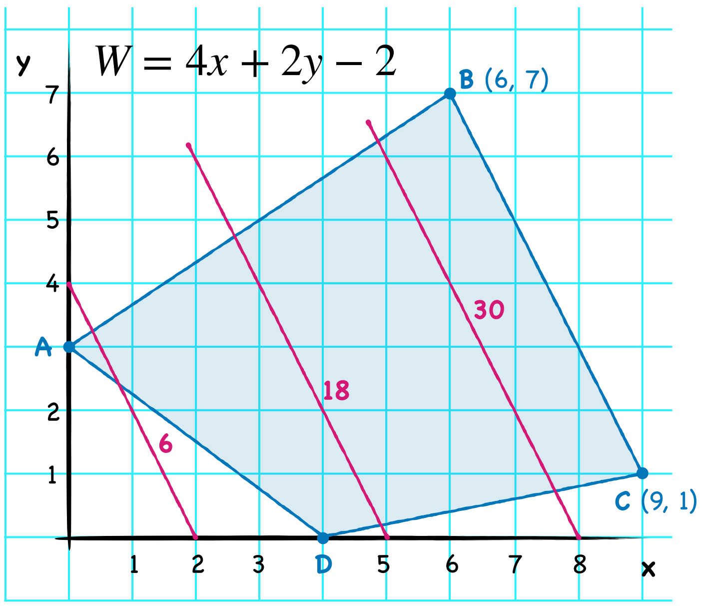


b)



$W = 30 - 2x - y$
y
x
C (7, 6)
B
D (8, 1½)
A (½, ½)
26
20
14
1
2
3
4
5
6
7
8

c)



$W = 4x + 2y - 2$
y
x
B (6, 7)
A
C (9, 1)
D
6
18
30
1
2
3
4
5
6
7
8

5. Woningbouw

Een woningbouwvereniging wil binnen 16 maanden op een terrein van 14.000 m² een aantal woningcomplexen en voorzieningen-eenheden (winkels, kantoren e.d.) bouwen. Een woningcomplex heeft een bouwtijd van 2 maanden en neemt 1000 m² in beslag. De bouw van een voorzieningen- eenheid duurt 1 maand en deze neemt 2000 m² in beslag. Omdat er maar een beperkt aantal arbeiders beschikbaar is, kan er maar aan één ding tegelijk gebouwd worden. Een woningcomplex kost 8 miljoen euro, een voorzieningen-eenheid 5 miljoen. Men heeft een budget van 80 miljoen. Noem het aantal te bouwen woningcomplexen x en het aantal voorzieningen-eenheden y.

a) Stel de drie ongelijkheden op voor x en y

Er is een grote behoefte aan woningcomplexen en aan voorzieningen-eenheden. Bij een woningcomplex zijn ongeveer 50 mensen gebaat, bij een voorzieningen-eenheid gemiddeld 30. De woningbouwvereniging wil nu zo gaan bouwen dat er zo veel mogelijk mensen bij gebaat zijn.

b) Welke doelfunctie wil de woningbouwvereniging optimaliseren?

c) Bepaal het toelaatbare gebied. Hoe zie je dat het budget geen echte beperking vormt? (De budgetvoorwaarde is "niet kritisch".)

d) Bepaal het maximum van de doelfunctie met behulp van isolijnen en ook door middel van de randwandelmethode.

Neem nu aan dat er niet 30, maar 24 mensen gebaat zijn bij een voorzieningen-eenheid (de doelfunctie verandert dus).

e) Bepaal ook nu met behulp van isolijnen en met behulp van de randwandelmethode het optimum van de doelfunctie.

f) Waarom zijn isolijnen nu niet zo handig?

Als er 30 mensen gebaat zijn bij een voorzieningen-eenheid is het het beste om 6 woningcomplexen en 4 voorzieningen-eenheden te bouwen. Als er 24 mensen bij een voorzieningen-eenheid gebaat zijn is het het beste om 8 woningcomplexen te bouwen en geen voorzieningen-eenheden. Ergens tussen 24 en 30 ligt een grens waarbij beide bouwplannen optimaal zijn.

g) Bij welke behoefte aan voorzieningen-eenheden ligt die grens?

Noem nog een bouwplan dat dan optimaal is.

6. Beleggen

Een pensioenfonds gaat een bedrag van 30 miljoen euro beleggen in aandelen, obligaties en onroerend goed. De volgende drie regels moeten in acht worden genomen.

- Er moet minstens 3 miljoen euro in elk van de drie categorieën worden belegd.
- Minstens de helft van het totale bedrag moet worden belegd in aandelen en obligaties.
- Het bedrag dat voor aandelen wordt besteed mag niet het dubbele van het bedrag aan obligaties overschrijden.

De verwachte jaarlijkse opbrengst van aandelen is 8 procent van het hierin geïnvesteerde bedrag, voor obligaties en onroerend goed zijn deze bedragen achtereenvolgens 7 procent en 9 procent. Het pensioenfonds wil de opbrengst maximaliseren.
Noem de bedragen in miljoenen euro's die worden belegd in aandelen, obligaties en onroerend goed achtereenvolgens x, y en z.

a) Schrijf ongelijkheden op voor x, y en z uitgaande van de drie regels.
b) Aan welke gelijkheid (vergelijking) moeten x, y en z voldoen?
c) Herschrijf de ongelijkheden uit **a** met behulp van **b** tot ongelijkheden in x en y.
d) Wat is de doelfunctie (uitgedrukt in x en y)?

Je hebt nu weer een lineair programmeringsprobleem met twee variabelen.

e) Bepaal met behulp van randwandel of isolijnen bij welke verdeling van het bedrag van 30 miljoen euro over aandelen, obligaties en onroerend goed de opbrengst maximaal is. Hoe groot is die maximale opbrengst?

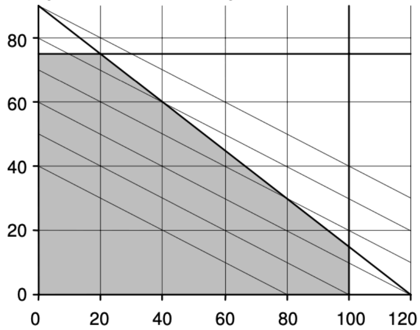
De jaarlijkse opbrengst van aandelen kan veranderen. Stel dat de jaarlijkse opbrengst van aandelen p procent is van het hierin geïnvesteerde bedrag. De jaarlijkse opbrengst van obligaties en onroerend goed blijft onveranderd.

f) Wat is nu de doelfunctie?
g) Als p groot is, waar is dan de doelfunctie maximaal? En waar is de doelfunctie maximaal als p klein is?
h) Bereken p in het geval er meer dan één optimale verdeling van het te beleggen bedrag mogelijk is. (Er zijn twee mogelijkheden.)

Antwoorden

1 **a.** $3x + 4y \le 360$, $x \le 100$, $y \le 75$

b,d.

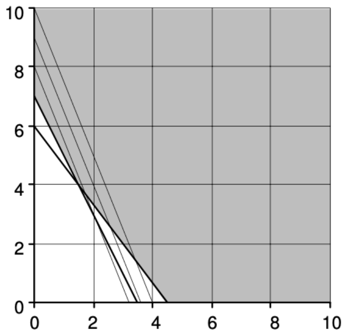


c. $x + 2y$

e. 20 kg koffie, 75 kg thee.

2 **a.** $x \ge 0$, $y \ge 0$, $600x + 300y \ge 2100$, $80x + 60y \ge 360$

b,d.



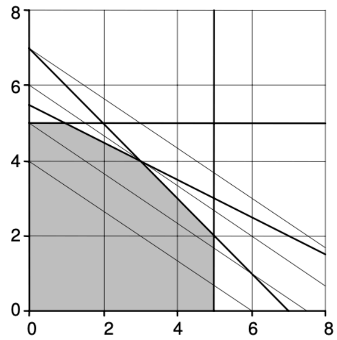
c. $x + 0{,}4y$

e. 7 kg hooi.

3 **a.** Opslagcapaciteit en mandagen.

b. $x \le 5$, $y \le 5$, $x + y \le 7$, $x + 2y \le 11$

c,e.



d. $200x + 300y$

f. Bij 3 moderne en 4 klassieke tafels.

g. $300x + 300y$

h. Bij 5 moderne en 2 klassieke, bij 3 moderne en 4 klassieke en bij 4 moderne en 3 klassieke.

4 **a.** max. 11 in C ; min. 0 in A

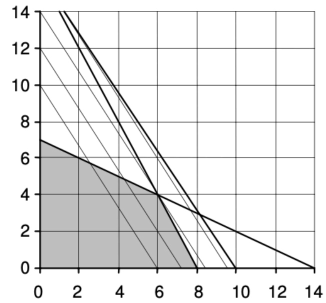
b. max. 38 in C ; min. 1 in A

c. max. 27 in A ; min. 11 in elk punt van lijnstuk BC

5 **a.** $1000x + 2000y \le 14000$, $2x + y \le 16$, $8x + 5y \le 80$

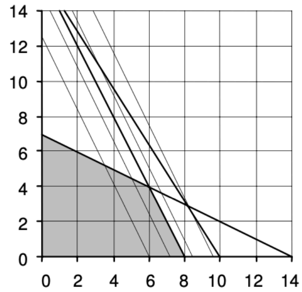
b. $50x + 30y$

c.



Lijn $8x+5y = 80$ is geen grens van het toelaatbare gebied.

d. 420 (aangenomen in (6,4)).



e. 400 (aangenomen in (8,0)).

f. Er moeten 25 mensen met een voorzieningen-eenheid gebaat zijn. Dan is het ook optimaal om 7 woningcomplexen en 2 voorzieningen-eenheden te bouwen.

6 **a.** $x \ge 3$, $y \ge 3$, $z \ge 3$, $x + y \ge 15$, $x \le 2y$

b. $x + y + z = 30$

c. $x \ge 3$, $y \ge 3$, $x + y \le 27$, $x + y \ge 15$, $x - 2y \le 0$

d. $0{,}08x + 0{,}07y + 0{,}09z$ en $z = 30 - x - y$ geeft $2{,}7 - 0{,}01x - 0{,}02y$

e. $x = 10$, $y = 5$, $z = 15$; 2,5 miljoen.

f. $2{,}7 + 0{,}01(p - 9)x - 0{,}02y$

g. In (18,9) ; in (3,12).

h. $p = 7$ of $p = 10$.