

Wiskunde Uitwerkingen

Leerjaar 1 - Periode 3

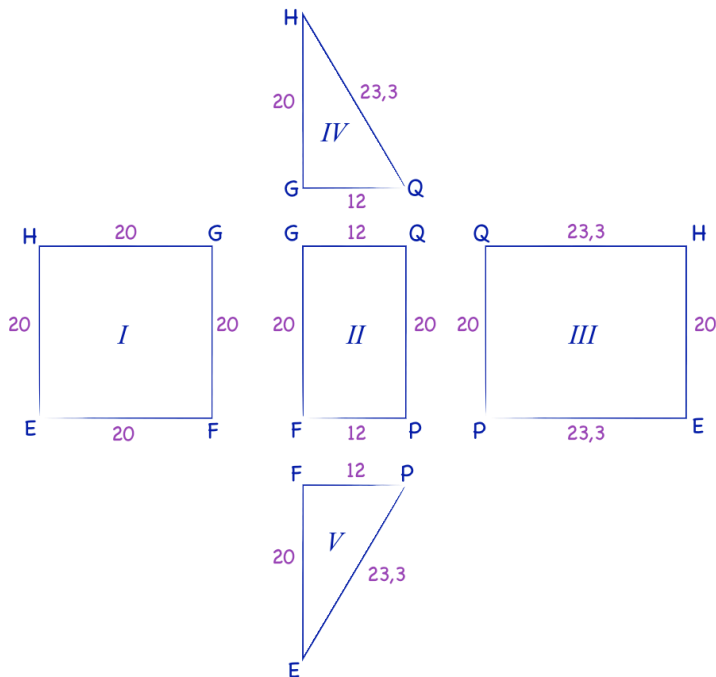
Meetkunde 3D

Hoofdstuk 4 t/m 7

Hoofdstuk 4

1. a) $opp. = 6 \times ribbe \times ribbe = 6 \times ribbe^2 = 864 \text{ cm}^2$
b) $inh. = ribbe \times ribbe \times ribbe = ribbe^3 = 1.728 \text{ cm}^3$
2. a) $opp. = 2 \times 300 \times 30 + 2 \times 30 \times 15 + 2 \times 300 \times 15 = 27.900 \text{ cm}^2$
b) $inh. = l \times b \times h = 300 \times 30 \times 15 = 135.000 \text{ cm}^3$
3. a) $opp. = 2 \times l \times b + 2 \times b \times h + 2 \times l \times h = 1.090 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow 2 \times 13 \times b + 2 \times b \times 21 + 2 \times 13 \times 21 = 1.090$
 $\Rightarrow 26b + 42b + 546 = 1.090$
 $\Rightarrow 68b = 544$
 $\Rightarrow b = \frac{544}{68} = 8 \text{ cm}$
b) $inh. = l \times b \times h = 13 \times 21 \times 8 = 2.184 \text{ cm}^3$
4. $volume = 240 \times 154 \times 145 - 64 \times 82 \times 145 = 4.598.240 \text{ mm}^2$
5. a) $lengte = \frac{533,52}{12 \times 57} = 0,78 \text{ cm}$
N.B. Dit is een merkwaardige uitkomst. Er zit een fout in de opgave.
b) $opp. = 2 \times l \times b + 2 \times b \times h + 2 \times l \times h$
 $opp. = 2 \times 0,78 \times 12 + 2 \times 12 \times 57 + 2 \times 0,78 \times 57 = 1.475,6 \text{ cm}^2$
6. a) $ribbe = \sqrt[3]{1.728} = 12 \text{ cm}$
b) $opp. = 6 \times ribbe^2 = 864 \text{ cm}^2$
7. a) $ribbe = \sqrt[2]{\frac{726}{6}} = 11 \text{ cm}$
b) $inh. = ribbe^3 = 11^3 = 1.331 \text{ cm}^3$
8. $schuine \text{ zijde} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16,97 \text{ cm}$
 $opp. \text{ gearceerde doorsnede} = 12 \times 16,97 = 203,6 \text{ cm}^2$
9. $BP = \sqrt{12^2 + 24^2} = 26,8 \text{ cm}$
 $opp. ABPQ = 24 \times 26,8 = 644,0 \text{ cm}^2$

10.



$CQ = \frac{2}{5}$ van de zijde; $\frac{2}{5} \times 20 = 8 \text{ cm} \Rightarrow QG = 20 - 8 = 12 \text{ cm}$ (en FP dus ook).

$HQ = \sqrt{12^2 + 20^2} = \sqrt{544} \approx 23,3 \text{ cm}$ (en EP dus ook).

$Opp.I = 20 \times 20 = 400,0$

$Opp.II = 20 \times 12 = 240,0$

$Opp.III = 20 \times \sqrt{544} \approx 466,5$

$Opp.IV = \frac{1}{2} \times 12 \times 20 = 120,0$

$Opp.V = \frac{1}{2} \times 12 \times 20 = 120,0$

$Opp.totaal : 1.346,5 \text{ cm}^2$

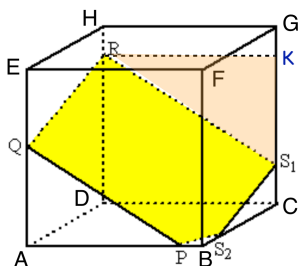
Inhoud

Mogelijkheid 1: $Inhoud = \text{helft van balk met afm. } 12 \times 20 \times 20$; dus $\frac{1}{2} \times 12 \times 20 \times 20 = 2.400 \text{ cm}^3$

Mogelijkheid 2: $Inhoud \text{ prisma} = \text{opp.grondvl.} \times \text{hoogte}$; dus $120 \times 20 = 2.400 \text{ cm}^3$

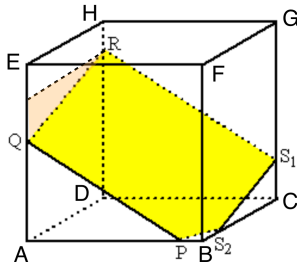
11.

Bereken één voor één de vier zijden van dit vlak, steeds met de stelling van Pythagoras.



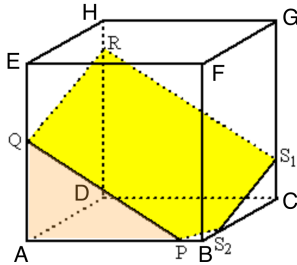
We beginnen bij RS_1 . Dit is de schuine zijde van driehoek RKS_1 .

$$\left. \begin{array}{l} RH = GK = 8 \text{ en } GS_1 = 40. \Rightarrow KS_1 = 32 \\ RK = HG = 48 \end{array} \right\} RS_1 = \sqrt{32^2 + 48^2} = \sqrt{3.328} \approx 57,7 \text{ cm}$$



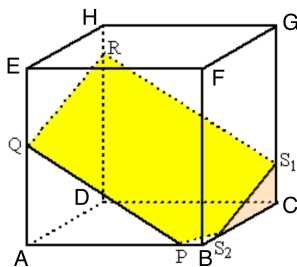
Dan nu QR . Dit is de schuine zijde van driehoek QLR .

$$\left. \begin{array}{l} RH = EL = 8 \text{ en } EQ = 24. \Rightarrow LQ = 16 \\ RL = HE = 48 \end{array} \right\} QR = \sqrt{16^2 + 48^2} = \sqrt{2.560} \approx 50,6 \text{ cm}$$



Vervolgens QP . Dit is de schuine zijde van driehoek APQ .

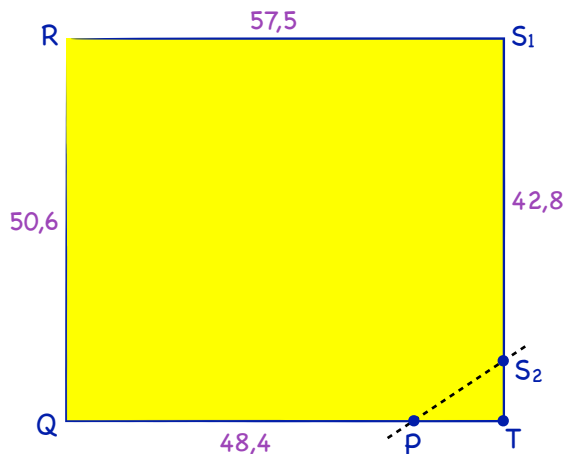
$$\left. \begin{array}{l} EQ = 24. \Rightarrow QA = 24 \\ AP = 42 \end{array} \right\} QP = \sqrt{24^2 + 42^2} = \sqrt{2.340} \approx 48,4 \text{ cm}$$



Tenslotte S_1S_2 . Dit is de schuine zijde van driehoek S_1S_2C .

$$\left. \begin{array}{l} GS_1 = 40 \Rightarrow S_1C = 8 \\ BS_2 = 6 \Rightarrow S_2C = 42 \end{array} \right\} S_1S_2 = \sqrt{8^2 + 42^2} = \sqrt{1.828} \approx 42,8 \text{ cm}$$

Teken of schets nu het vlak QRS_1S_2P :



Met deze maten kun je nu PT en TS_2 berekenen.

Let op! Punt T is NIET hetzelfde als punt B ! Punt T steekt als het ware uit 'onder' de kubus.

$$PT = 57,5 - 48,4 = 9,1 \text{ cm}$$

$$TS_2 = 50,6 - 42,8 = 7,8 \text{ cm}$$

$$\text{Oppervlakte } QRS_1S_2P = \text{Opp. } \square QRS_1T - \text{Opp. } \triangle PS_2T = 57,5 \times 50,6 - \frac{1}{2} \times 9,1 \times 7,8 \approx 2.874,0 \text{ cm}^2$$

N.B. Als je het héél mooi wilt doen, moet je met de wortels rekenen; dan rond je niets af tussendoor en wordt je antwoord nog nauwkeuriger:

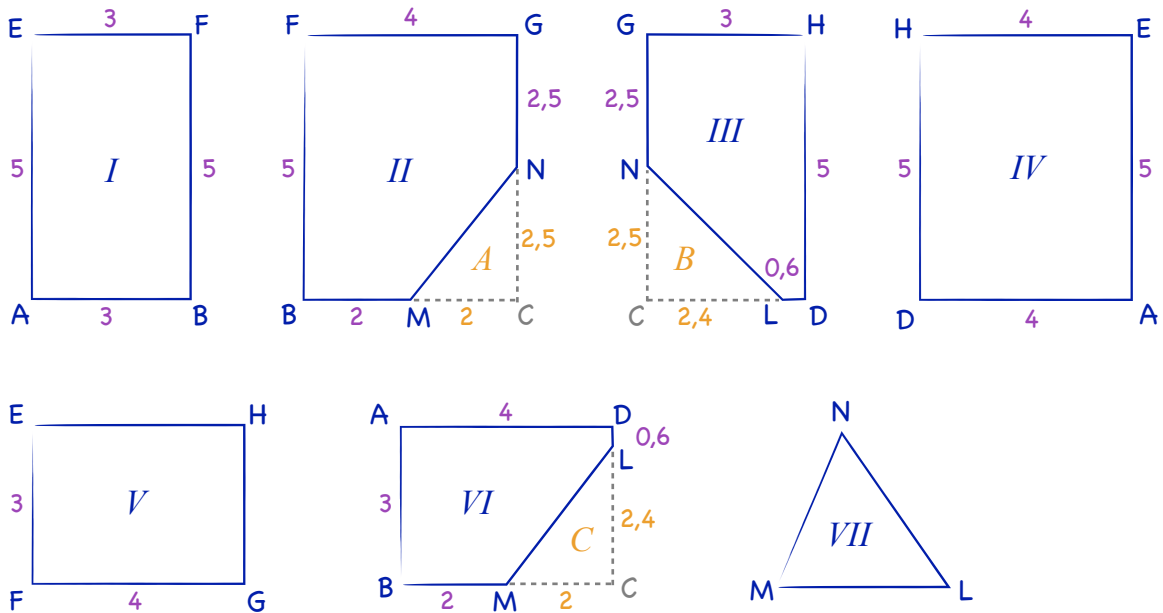
$$\text{Oppervlakte } QRS_1S_2P = \text{Opp. } \square QRS_1T - \text{Opp. } \triangle PS_2T$$

$$= \sqrt{3.328} \times \sqrt{2.560} - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3.328} - \sqrt{2.340}) \times (\sqrt{2.560} - \sqrt{1.828}) \approx 2.882,3 \text{ cm}^2$$

12. Deze opgave vervalt.

13.

Teken of schets eerst de vlakken van het overgebleven deel :



$$\text{Opp. I} = 3 \times 5 = 15,0$$

$$\text{Opp. II} = 5 \times 4 - \text{opp. } \triangle A = 20 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2,5 = 17,5$$

$$\text{Opp. III} = 5 \times 3 - \text{opp. } \triangle B = 15 - \frac{1}{2} \times 2,4 \times 2,5 = 12,0$$

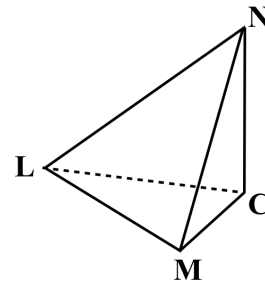
$$\text{Opp. IV} = 5 \times 4 = 20,0$$

$$\text{Opp. V} = 3 \times 4 = 12,0$$

$$\text{Opp. VI} = 3 \times 4 - \text{opp. } \triangle C = 12 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2,4 = 9,6$$

$$\begin{aligned} \text{Opp. VII} &= \sqrt{(\text{opp. } \triangle A)^2 + (\text{opp. } \triangle B)^2 + (\text{opp. } \triangle C)^2} \\ &= \sqrt{(2,5)^2 + (3)^2 + (2,4)^2} = \sqrt{21,01} \approx 4,6 \end{aligned}$$

$$\text{Opp. totaal : } 90,7 \text{ cm}^2$$



Inhoud

Van de balk wordt een 'piramide' afgesneden.

Bereken de inhoud van de piramide :

$$\text{inhoud} = \frac{1}{3} \times \text{opp. grondvlak} \times \text{hoogte} = \frac{1}{3} \times \text{opp. } \triangle C \times \text{hoogte} = \frac{1}{3} \times 2,4 \times 2,5 = 2 \text{ cm}^3.$$

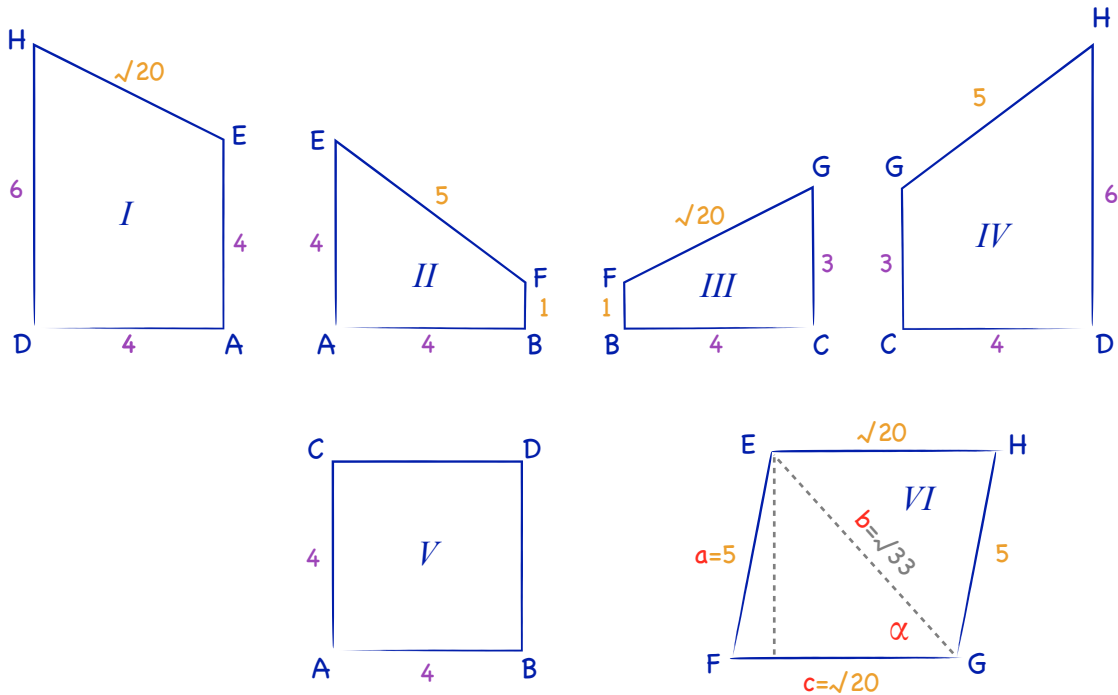
De oorspronkelijke balk had een inhoud van $3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$.

De inhoud van het overgebleven deel is dus : $60 - 2 = 58 \text{ cm}^3$.

14.

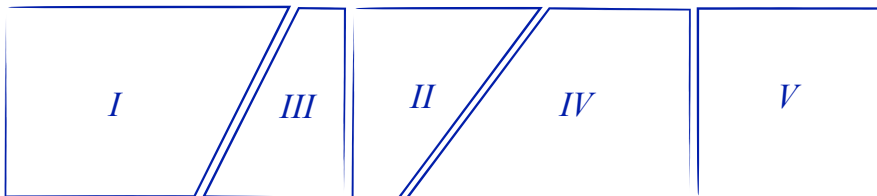
Oppervlakte

Teken of schets eerst de vlakken van het overgebleven deel :



We kunnen de oppervlaktes op de gewone manier uitrekenen, maar soms kun je met wat creativiteit andere oplossingen vinden...

Vorm I t/m V kun je samen zien als één rechthoek van $18 \times 4 = 72 \text{ cm}^2$.



Nu alleen nog parallellogram EFGH. Misschien weet je nog dat de oppervlakte van een parallellogram $\text{basis} \times \text{hoogte}$ is. Alleen, we weten hoogte h nog niet. We berekenen h op de volgende manier:

Eerst berekenen we diagonaal EG met Pythagoras, daar komt uit $\sqrt{33}$.

Met de cosinusregel berekenen we hoek α en daarna berekenen we h via de sinus van hoek α :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow 5^2 &= (\sqrt{33})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow 25 &= 33 + 20 - 2 \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow 28 &= 2\sqrt{660} \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{28}{2\sqrt{660}} \approx 0,5449 \Rightarrow \alpha = 57,0^\circ
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow 5^2 &= (\sqrt{33})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2 \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow 25 &= 33 + 20 - 2 \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow 28 &= 2\sqrt{660} \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{28}{2\sqrt{660}} \approx 0,5449 \Rightarrow \alpha = 57,0^\circ \end{aligned}} \right\} h = \sin \alpha \times \sqrt{33} \approx 4,8 \text{ cm}$$

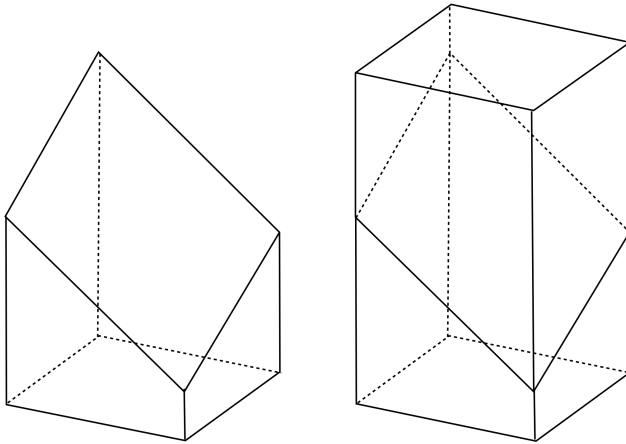
Oppervlakte parallellogram EFGH = $\text{basis} \times \text{hoogte} = \sqrt{20} \times 4,8 \approx 21,5 \text{ cm}^2$

Dit tellen we op bij de rechthoek van 72 cm^2 .

Oppervlakte = $21,5 + 72 = 93,5 \text{ cm}^2$

Inhoud

Ook voor de inhoud passen we een slimme truc toe. Stel je voor dat we de overgebleven figuur kopiëren en ondersteboven op het origineel plaatsen. Dan krijgen we een balk van $7 \times 4 \times 4 = 112 \text{ cm}^3$. Het origineel is nu de helft van deze balk, dus $112 \div 2 = 56 \text{ cm}^3$.

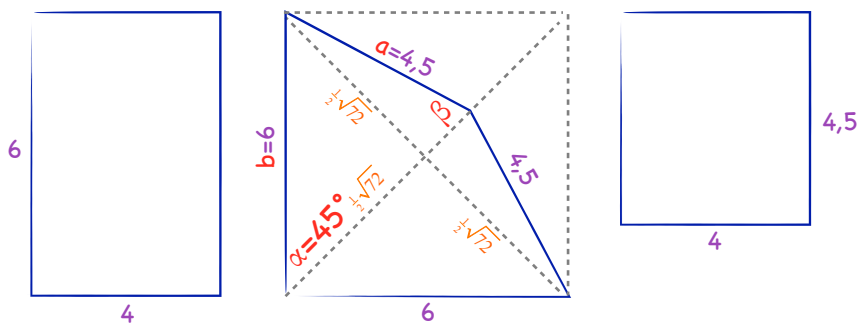


15.

Oppervlakte

Teken of schets eerst de vlakken van het overgebleven deel.

Deze drie vlakken zitten allemaal twee keer in het trapezium:



De rechte vlakken zijn eenvoudig: $Opp. = 2 \times 6 \times 4 + 2 \times 4 \times 4,5 = 84 \text{ cm}^2$

De vlieger is lastiger. De oppervlakte van een vlieger is: $\frac{1}{2} \times \text{diagonaal 1} \times \text{diagonaal 2}$

Diagonaal 1 vinden we via Pythagoras: $\text{diagonaal 1} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$

We weten dat hoek $\alpha = 45^\circ$, want diagonaal 2 deelt het oorspronkelijke vierkant exact middendoor.

Met de sinusregel kunnen we dan hoek β uitrekenen:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{4,5}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{6 \times \sin 45^\circ}{4,5} \approx 0,9428 \Rightarrow \beta = 70,5^\circ$$

En nu kunnen we via de cosinus van hoek β het ontbrekende stukje van diagonaal 2 uitrekenen:

$$\cos \beta = \cos 70,5^\circ = \frac{\text{ontbr. stukje}}{4,5} \Rightarrow \text{ontbr. stukje} = 4,5 \times \cos 70,5^\circ = 1,5$$

Diagonaal 2 wordt daarmee: $\frac{1}{2} \sqrt{72} + 1,5 \approx 5,74$

En de oppervlakte van de vlieger dus: $\frac{1}{2} \times \text{diagonaal 1} \times \text{diagonaal 2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{72} \times 5,74 \approx 24,4 \text{ cm}^2$

De totale oppervlakte van het overgebleven deel: $84 + 2 \times 24,4 = 132,7 \text{ cm}^2$

Inhoud

De inhoud berekenen we uitgaande van een trapezium, waarvan het grondvlak de vlieger is.

$$\text{Opp.} = \text{opp.grondvl} \times \text{hoogte} = 24,4 \times 4 = 97,5 \text{ cm}^3$$

Hoofdstuk 5

1. a) $\text{opp.} = 4\pi r^2 = 4\pi 24^2 = 7.238,2 \text{ cm}^2$
 (diameter: $\text{opp.} = \pi D^2 = \pi 48^2 = 7.238,2 \text{ cm}^2$)
 b) $\text{inh.} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 24^3 = 57.905,8 \text{ cm}^3$
 (diameter: $\text{inh.} = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi 48^3 = 57.905,8 \text{ cm}^3$)

2. a) $\text{opp.} = 4\pi r^2 = 4\pi (1,5)^2 = 28,3 \text{ m}^2$
 (diameter: $\text{opp.} = \pi D^2 = \pi 3^2 = 28,3 \text{ m}^2$)
 b) $\text{inh.} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (1,5)^3 = 14,1 \text{ m}^3$
 (diameter: $\text{inh.} = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi 3^3 = 14,1 \text{ m}^3$)

3. a) $\text{inh.} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 11.494 \text{ cm}^3$
 $\Rightarrow \text{inh.} = r^3 = \frac{11.494}{\frac{4}{3}\pi} = 2.744,0$
 $\Rightarrow r = \sqrt[3]{2.744,0} = 14,0 \text{ cm}$
 b) $\Rightarrow D = 2r = 28,0 \text{ cm}$

4. a) $\text{opp.} = 4\pi r^2 = 1.493,0 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow \text{inh.} = r^2 = \frac{1.493,0}{4\pi} = 118,8$
 $\Rightarrow r = \sqrt{118,8} = 10,9 \text{ cm}$
 b) $\Rightarrow D = 2r = 21,8 \text{ cm}$

5. $\text{evenaar} = \text{omtrek} = D\pi = 40.000 \text{ km}$
 $\Rightarrow D = \frac{40.000}{\pi} = 12.732,4 \text{ km}$
 $\text{opp.} = 30\% \times \pi D^2 = 0,30 \times \pi (12.732,4)^2 = 152.788,7 \text{ km}^2$

6. a) $6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ kogels}$
 b) $22 \times 6 = 132 \text{ mm} \Rightarrow 132 \times 132 \times 132 \text{ mm}$
 c) $\text{inhoud doos} - \text{inhoud } 216 \text{ kogels} = 132^3 - 216 \times \frac{1}{6}\pi (22)^2$
 $= 2.245.228,9 \text{ mm}^3 = 2.245,2 \text{ cm}^3$

7. $\text{Diameter} = \sqrt[3]{\frac{500}{\frac{1}{6}\pi}} = 21,1 \text{ m} \Rightarrow \text{opp.} = \pi D^2 = \pi (21,1)^2 = 1.401,7 \text{ m}^2$

8. a) $opp. = \frac{1}{2}\pi D^2 + \pi Dh = \frac{1}{2}\pi(10)^2 + \pi \times 10 \times 12,7 = 556,1 \text{ cm}^2$

b) $inh. = \frac{1}{4}\pi D^2 h = \frac{1}{4}\pi \times (10)^2 \times 12,7 = 997,5 \text{ cm}^3$

9. a) $inh. = \frac{1}{4}\pi D^2 h = \frac{1}{4}\pi D^2 \times 15 = 750 \text{ cm}^3$

$$D = \sqrt{\frac{750}{\frac{1}{4}\pi \times 15}} = 8,0 \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{1}{2}D = 4,0 \text{ cm}$$

b) $opp. = \frac{1}{2}\pi D^2 + \pi Dh = \frac{1}{2}\pi(8,0)^2 + \pi \times 8,0 \times 15 = 477,5 \text{ cm}^2$

10. $inh. = \frac{1}{4}\pi D^2 h = \frac{1}{4}\pi(2,2)^2 \times h = 190 \text{ cm}^3$

$$h = \frac{190}{\frac{1}{4}\pi(2,2)^2} = 50,0 \text{ cm}$$

11.

Inhoud 6 cilinders

$$2,998 \text{ liter} = 2,998 \text{ dm}^3$$

$$= 2.998 \text{ cm}^3 = 2.998.000 \text{ mm}^3$$

Inhoud 1 cilinder

$$2.998.000 \div 6 = 499.666,7 \text{ mm}^3$$

$$Inhoud = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow 499.667,7 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot 94,6$$

$$\Rightarrow D^2 = \frac{499.667,7}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 94,6} = 6.725,1$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{6.725,1} = 82,0 \text{ mm}$$

12. $inh. = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi(110)^3 = 697,0 \text{ m}^3$

13. $inh. = \frac{1}{4}\pi D^2 h = \frac{1}{4}\pi(10)^2 \times 15 = 1.178,1 \text{ m}^3$

$$aantal \text{ ritten} = \frac{1.178,1}{24} = 49,1 \text{ ritten}$$

zeven vrachtwagens rijden ieder zeven keer : $7 \times 7 = 49$

(eigenlijk moet één vrachtw. nog een achtste keer rijden)

14.

De inhoud van de twee halve bollen is samen de inhoud van een hele bol:

$$\text{inhoud bol} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 90^3 = 381.703,5074... \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{inhoud cilinder} &= \text{totale inhoud} - \text{inhoud bol} = 1.950.000 - 381.703,5074... \\ &= 1.568.296,493... \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\text{inhoud cilinder} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow 1.568.296,493... \text{ cm}^3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 90^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1.568.296,493...}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 90^2} = 246,5206311... \text{ cm}$$

De totale lengte van de gastank wordt dan: $246,5206311 + 90 \approx 336,5 \text{ cm}$

$$\text{inh. bol} - \text{inh. cilinder} = \frac{1}{6} \pi D^3 - \frac{1}{4} \pi D^2 h$$

$$\begin{aligned} 15. &= \frac{1}{6} \pi (22,3)^3 - \frac{1}{4} \pi (13,0)^2 \times 19,0 \\ &= 3.284,6 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Hoofdstuk 6

$$1. \quad \text{a)} \quad \text{opp.}_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp.}_{\square_1} = l \cdot b = 9 \cdot 12 = 108 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp.}_{\square_2} = l \cdot b = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp.}_{\square_1} = l \cdot b = 15 \cdot 12 = 180 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp. totaal} = 54 + 54 + 108 + 144 + 180 = 540 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} \quad \text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = 54 \times 12 = 648 \text{ cm}^3$$

$$2. \quad \text{a)} \quad \text{opp.}_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (35 - 24) = 132 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp.}_{\square_1} = l \cdot b = 24^2 = 576 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 5 van, incl. grondvlak}$$

$$\text{opp.}_{\square_2} = l \cdot b = 24 \cdot \sqrt{11^2 + 12^2} = 390,7 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp. totaal} = 2 \times 132 + 5 \times 576 + 2 \times 390,7 = 3.925,4 \text{ cm}^2$$

$$\text{b)} \quad \text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = (132 + 576) \times 24 = 16.992 \text{ cm}^3$$

$$3. \quad \text{a)} \quad \text{opp.}_{\cdot_1} = 24 \times 24 + \frac{1}{2} \times 18 \times 24 + 24 \times 12 + \frac{1}{2} \times 24 \times 6 = 132 \text{ cm}^2$$

$$= 576 + 216 + 288 + 72 = 1.152 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp.}_{\cdot_2} = 48 \times 24 = 1.152 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp.}_{\cdot_2} = 24 \times 12 = 288 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp.}_{\cdot_3} = 24 \times \sqrt{24^2 + 6^2} = 593,7 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp.}_{\cdot_4} = 24 \times 24 = 576 \text{ cm}^2 \quad - \text{ hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp.}_{\cdot_5} = 24 \times \sqrt{24^2 + 18^2} = 720 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp. totaal} = 2 \times 1152 + 1152 + 288 + 593,7 + 2 \times 576 + 720 = 6.209,7 \text{ cm}^2$$

b) $\text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = 1152 \times 24 = 27.648 \text{ cm}^3$

4. a) $\text{opp.}_{\text{trapezium}} = \frac{1}{2} \times \text{som evenw. zijden} \times h = \frac{1}{2} \times (24 + 12) \times 12 = 216 \text{ cm}^2$

- hier zijn er 2 van

$$\text{opp.}_2 = 8 \times 12 = 96 \text{ cm}^2 \quad \text{- hier is er 1 van}$$

$$\text{opp.}_3 = 8 \times \sqrt{6^2 + 12^2} = 107,36 \text{ cm}^2 \quad \text{- hier zijn er 2 van}$$

$$\text{opp.}_4 = 8 \times 24 = 192 \text{ cm}^2 \quad \text{- hier is er 1 van}$$

$$\text{opp. totaal} = 2 \times 216 + 96 + 2 \times 107,36 + 192 = 934,7 \text{ cm}^2$$

b) $\text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = 216 \times 8 = 1.728 \text{ cm}^3$

5. a) -

b) $\text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = \text{opp. ruit} \times 56 = 21.504 \text{ cm}^3$

$$\text{opp. ruit} = \frac{21.504}{56} = 384 \text{ cm}^2$$

$$\text{opp. ruit} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{384}{\frac{1}{2} \cdot 32} = 24 \text{ cm}$$

c) $\text{zijde} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 24\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 32\right)^2} = 20 \text{ cm}$

6. $GD = DH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\text{opp.}_{\triangle GHD} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12,5 \text{ cm}^2$$

7. a) $\text{opp. veelhoek} = n \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot r^2$

$$n = 5 \text{ en } \alpha = \frac{360}{5} = 72^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 36^\circ$$

$$\text{opp. veelhoek} = 5 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot 20^2 = 951,1 \text{ cm}^2$$

$$\text{omtrek. veelhoek} = 2 \cdot n \cdot \sin \left(\frac{180}{n} \right) \cdot r = 2 \cdot 5 \cdot \sin 36^\circ \cdot 20 = 117,6 \text{ cm}$$

$$\text{één zijde} = \frac{117,6}{5} = 23,5 \text{ cm}$$

$$\text{opp. prisma} = 2 \times \text{opp. veelhoek} + 5 \times \text{opp. zijde}$$

$$= 2 \times 951,1 + 5 \times 23,5 \times 50 = 7.780,1 \text{ cm}^2$$

b) $\text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = 951,1 \times 50 = 47.555 \text{ cm}^3$

8. $\text{opp. zijkant (= grondvlak prisma)} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 + 20 \cdot 58 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 58 = 1.675 \text{ cm}^2$

$$\text{inh.} = \text{opp. grondvl.} \times h = 1675 \times 40 = 67.000 \text{ cm}^3 = 67,0 \text{ l}$$

9. opp. zijkant (= grondvlak prisma)
 $= \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 38 = 597 \text{ cm}^2$
 $inh. = opp. grondvl. \times h = 597 \times 20 = 11.940 \text{ cm}^3$

10. opp. zijkant (= grondvlak prisma)
 $= 40 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 4 - 3 - \frac{1}{4} \pi (1)^2 - \frac{1}{4} \pi (2,5)^2$
 $= 360 - 8,75 - 13 - 3 - 0,785 - 4,909 = 329,6 \text{ cm}^2$
 $inh. = opp. grondvl. \times h = 329,6 \times 4 = 1.318,2 \text{ cm}^3$

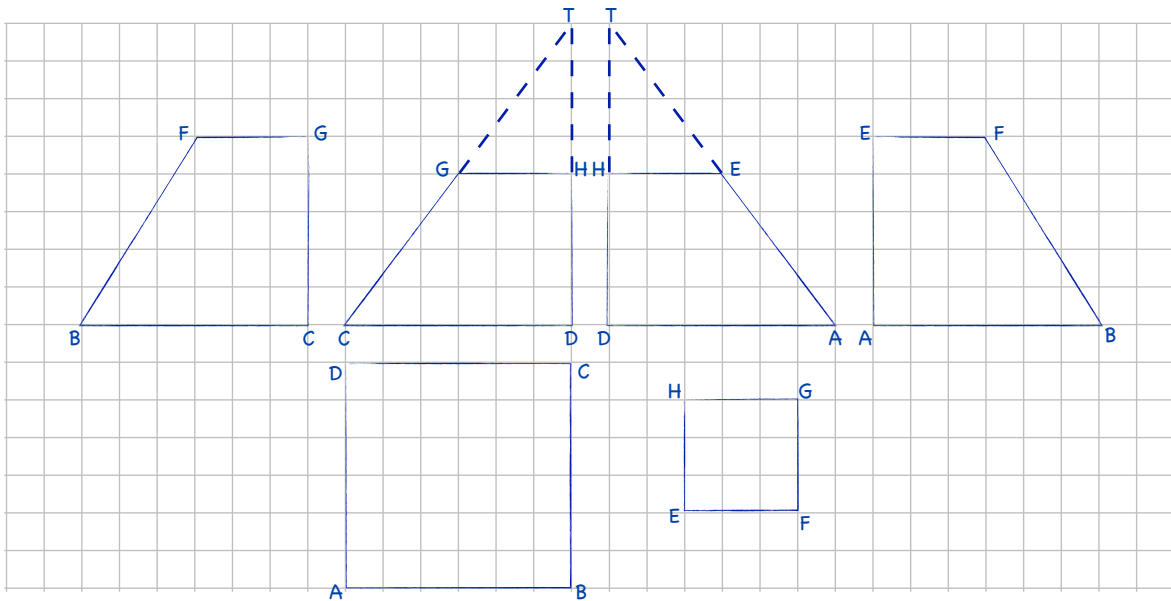
Hoofdstuk 7

1. a) $inh. piramide = \frac{1}{3} \cdot opp. grondvl. \cdot h = 980 \text{ cm}^3$
 $opp. grondvl. = \frac{980}{\frac{1}{3} \cdot 15} = 196 \text{ cm}^2$
 $zijde = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$
 b) $opp. zijvlak = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{7^2 + 15^2} = 115,9 \text{ cm}^2$
 $opp. piramide = 4 \times zijvlak + grondvlak = 4 \times 115,9 + 14^2 = 659,5 \text{ cm}^2$

2. a) $afst. halverwege AB \text{ tot midden grondvlak} : \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$
 $opp. zijvlak = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{(\sqrt{27})^2 + (6\sqrt{3})^2} = 34,9 \text{ cm}^2$
 $opp. veelhoek = n \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot r^2$
 $n = 6 \text{ en } \alpha = \frac{360}{6} = 60^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 306^\circ$
 $opp. veelhoek = 6 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot (\sqrt{27})^2 = 70,1 \text{ cm}^2$
 $opp. piramide = 6 \times zijvlak + grondvlak = 6 \times 34,9 + 70,1 = 279,5 \text{ cm}^2$
 b) $inh. piramide = \frac{1}{3} \cdot opp. grondvl. \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 70,1 \cdot 6\sqrt{3} = 242,80 \text{ cm}^3$

3.

Teken of schets eerst de vlakken van de afgeknotte piramide :



$DT = 8$ en grondvlak is 6×6 ; en $EFGH$ ligt op hoogte 4; dan worden HG en HE automatisch 3.
 AE en CG zijn allebei de schuine zijde van een $3-4-5$ -driehoek; dus $AE = CG = 5$.

$$\text{Opp. } BCGF = 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = 22\frac{1}{2}$$

$$\text{Opp. } ABFE = \text{hetzelfde} = 22\frac{1}{2}$$

$$\text{Opp. } CDHG = 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 18$$

$$\text{Opp. } DAEH = \text{hetzelfde} = 18$$

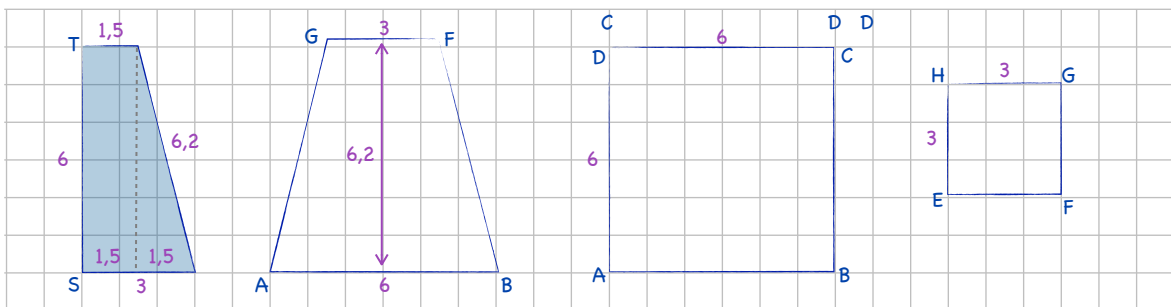
$$\text{Opp. } ABCD = 6^2 = 36$$

$$\text{Opp. } EFGH = 4^2 = 16$$

$$\text{Totale opp. afgekn. piramide} = 22\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} + 18 + 18 + 36 + 16 = 133 \text{ cm}^2$$

4.

Teken of schets eerst het blauwe hulpvlak (zie figuur) en één van de zijvlakken + grondvlak + bovenvlak.



Via het blauwe hulpvlak bereken je de hoogte van de zijvlakken: $h = \sqrt{(1,5)^2 + 6^2} \approx 6,2 \text{ cm}$.

De oppervlakte van een zijvlak wordt dan: $3 \times 6,18465... + 2 \times \frac{1,5 \times 6,18465...}{2} \approx 27,8 \text{ cm}^2$

Totale opp. afgekn. piramide $= 4 \times 27,83096... + 6^2 + 3^2 \approx 156,3 \text{ cm}^2$

5.

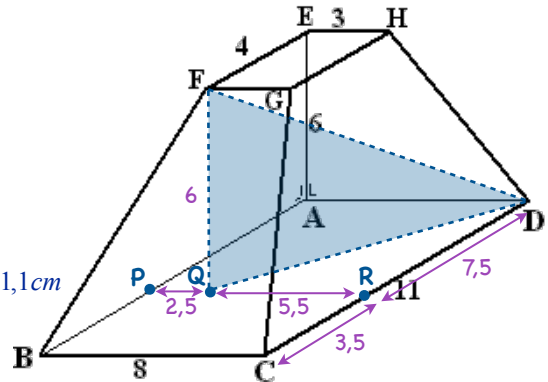
- a) Bereken de lengte van FD.

Teken hulpdriehoek FQD

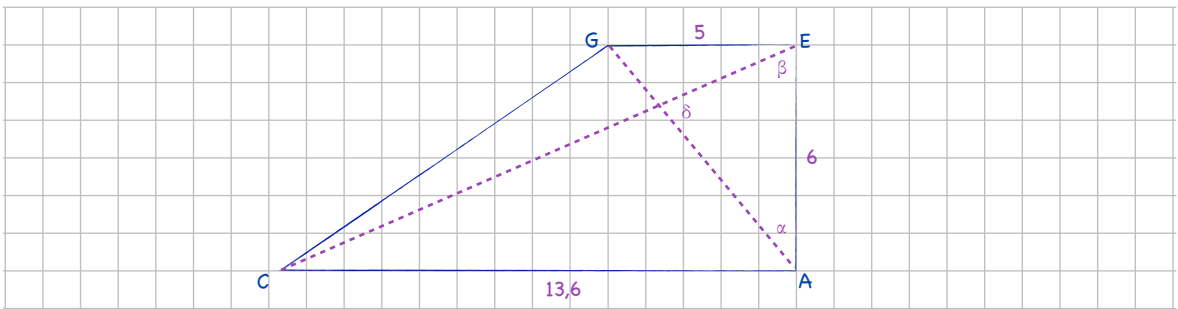
$$PQ = \frac{BC - FG}{2} = \frac{8 - 3}{2} = 2,5 \Rightarrow QR = 8 - 2,5 = 5,5$$

$$CR = \frac{CD - GH}{2} = \frac{11 - 4}{2} = 3,5 \Rightarrow RD = 11 - 3,5 = 7,5$$

verl.stelling v. Pythagoras: $FD = \sqrt{6^2 + (5,5)^2 + (7,5)^2} \approx 11,1 \text{ cm}$



- b) Teken vlak ACGE, en bereken daarmee de hoek die AG en EC met elkaar maken.



AE is gegeven :6cm; GE en CA bereken je met de stelling van Pythagoras :GE = 5 cm en CA ≈ 13,6 cm.

$$\angle \alpha \text{ in } \triangle AEG = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 39,8^\circ \quad \angle \beta \text{ in } \triangle CAE = \tan^{-1}\left(\frac{13,6}{6}\right) \approx 66,2^\circ.$$

$$\Rightarrow \angle \delta = 180^\circ - 39,8^\circ - 66,2^\circ \approx 74,0^\circ$$

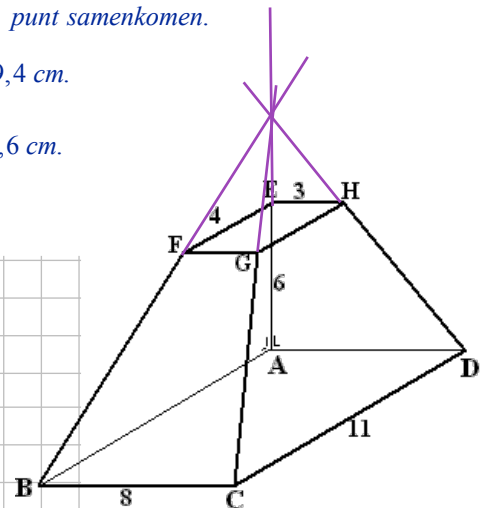
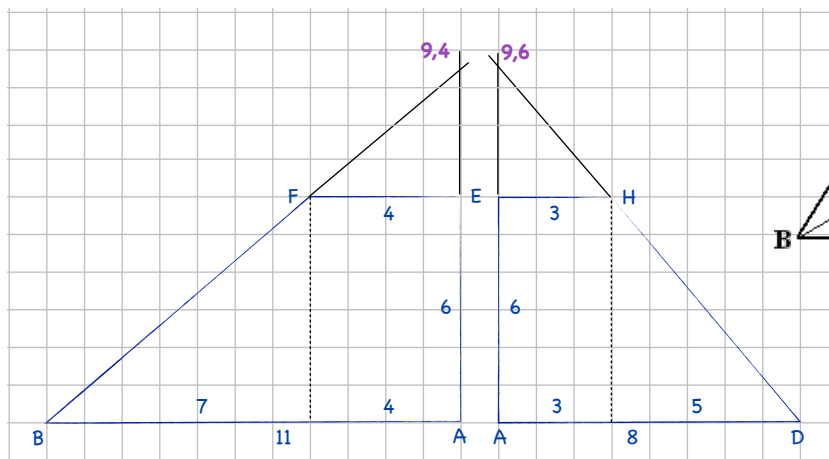
- c) Is de figuur hiernaast eigenlijk wel een afgeknotten piramide? Verklaar je antwoord.

Als het een afgeknotten piramide is, moeten de opstaande ribben in één punt samenkomen.

Als je BF doortrekt naar boven, kom je op een hoogte van: $\frac{11}{7} \times 6 \approx 9,4 \text{ cm}$.

Als je BH doortrekt naar boven, kom je op een hoogte van: $\frac{8}{5} \times 6 = 9,6 \text{ cm}$.

conclusie: de figuur is géén afgeknotten piramide.



6.

Teken hulpdriehoeken KLM en XLT .

Deze driehoeken zijn gelijkvormig en hebben daarom dezelfde verhoudingen.

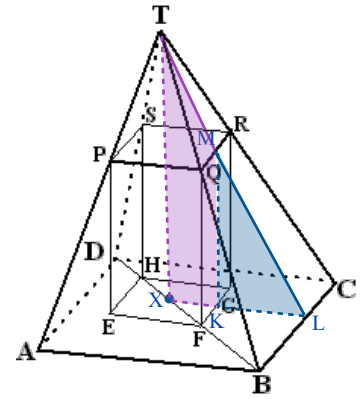
Hoogte $KM = 8$; hoogte $TX = 12$. Een verhouding van $1:1,5$.

Deze verhouding zit ook tussen KL en XL .

$XL = 3$ en daarom moet KL gelijk zijn aan $3 \div 1,5 = 2$.

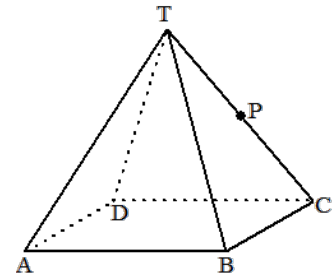
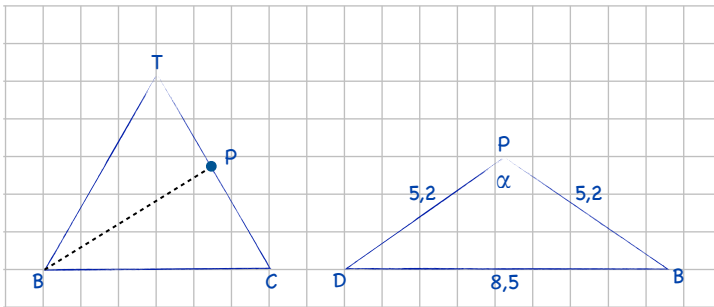
Dan is EF ook bekend, namelijk: $6 - 2 - 2 = 2$.

De inhoud van de balk is: $2 \times 2 \times 8 = 32 \text{ cm}^3$



7.

Schets $\triangle BCT$ en $\triangle DPB$. Kies zelf een lengte voor de ribben, bijv. 6 cm.



Bereken BP . Als ribbe = 6, dan: $BP = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2$. DP is dan hetzelfde $\approx 5,2$.

Bereken BD . Als ribbe = 6, dan: $BD = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8,5$.

Bereken nu met de cosinusregel hoek α .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (8,5)^2 = (5,2)^2 + (5,2)^2 - 2 \times 5,2 \times 5,2 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 72,25 = 54,08 - 54,08 \times \cos \alpha$$

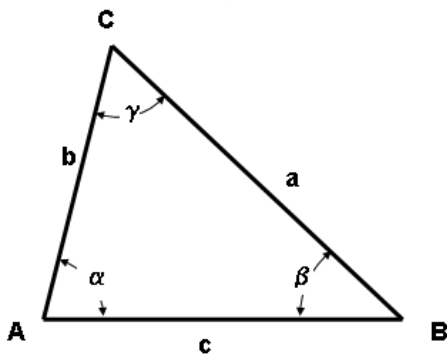
$$\Rightarrow 18,17 = -54,08 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{18,17}{-54,08} = -0,33598\dots$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,33598\dots) \approx 109,6^\circ$$

Cosinusregel

De cosinusregel geldt voor iedere willekeurige driehoek. Je kunt er hoeken mee uitrekenen als je de lengte van alle zijden weet. Bedenk wel dat zijde a tegenover hoek α geplaatst wordt; zijde b tegenover hoek β en zijde c tegenover hoek γ .



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

8. a) $schuine\ zijde = \sqrt{6^2 + 24^2} = \sqrt{612} = 24,7\ cm$
 $straal\ uitslag = 24,7\ cm, D = 2r = 49,5$
de zijde van een kartonnen vel moet min. 49,5 cm zijn

b) $Opp.\ vel - opp.\ cirkel\ sector = (49,5)^2 - \frac{6}{24,7} \cdot \pi (24,7)^2$
 $= 2.450,25 - 465,6^2 = 1.984,7\ cm^2$

9. $omtrek\ onderrand = 70\ cm$ dus $r = \frac{70}{2\pi} = 11,1\ cm$

$schuine\ zijde = \sqrt{11,1^2 + 18^2} = 21,2\ cm$

$Opp.\ cirkel\ sector = \frac{11,1}{21,2} \cdot \pi (21,2)^2 = 739,3\ cm^2$

10. $inhoud\ kegel = 0,5\ l = 500\ cm^3$

$inhoud\ kegel = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 500$

$r = \sqrt{\frac{500}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20}} = 4,9\ cm$

$opp.\ mantel = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \cdot 4,9 \cdot \sqrt{(4,9)^2 + 20^2} = 317,0\ cm^2$